Densité des polynômes orthogonaux

- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation.* (110, 140-142)

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit ρ une fonction poids.
> S'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Démonstration. Comme les polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'obtiennent par orthonormalisation de Gram-Schmidt de la famille de polynômes (X^n), alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $L^2(I,\rho)$, un espace de Hilbert.
Il suffit de montrer que $\overline{\mathrm{Vect}(P_n,\ n\in\mathbb{N})} = L^2(I,\rho)$.
Or $\mathrm{Vect}(X^n,\ n\in\mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(P_n,\ n\in\mathbb{N})$. Donc, montrons que $\mathrm{Vect}(X^n,\ n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$.
Soit $f \in L^2(I,\rho)$. Montrer que si $\forall n\in\mathbb{N},\ (f\,|\,X^n) = 0$ alors $f \equiv 0$ dans $L^2(I,\rho)$.

- Définissons tout d'abord la transformée de Fourier de $f\rho$.

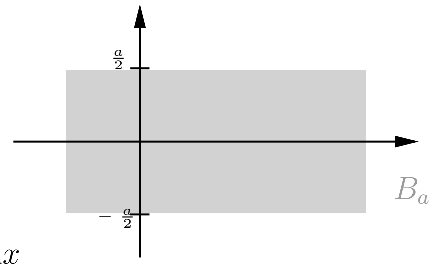
On pose $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x\in I \\ 0 & \text{si } x\notin I \end{cases}$

$$\forall x\in I,\quad |\varphi(x)| = |f(x)|\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x) \qquad \text{car } \forall t\geqslant 0,\ t\leqslant \frac{1+t^2}{2}$$

Comme $\rho,\ |f|^2\rho \in L^1(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier de φ est bien définie :

$$\forall \xi\in\mathbb{R},\ \hat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x)e^{-i\xi x}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

- Étendons $\hat{\varphi}$ en une fonction holomorphe sur $B_a = \left\{z\in\mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)| < \dfrac{a}{2}\right\}$ avec $a > 0$.



Soit $z\in B_a$. Comme $\forall x\in I$,
$|e^{-izx}| = |e^{-i(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))x}| = e^{\mathrm{Im}(z)x} \leqslant e^{|\mathrm{Im}(z)||x|}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_I |f(x)e^{-izx}\rho(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_I |f(x)|e^{\mathrm{Im}(z)x}\rho(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_I |f(x)|e^{\frac{a}{2}|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \underbrace{\left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{par hypothèse}} \underbrace{\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}_{f\in L^2(I,\rho)} < +\infty
\end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz. Donc, $x\mapsto f(x)e^{-izx}\rho(x) \in L^1(\mathbb{R})$.
Par conséquent, on peut définir pour $z\in B_a$, $F(z) = \displaystyle\int_I \underbrace{f(x)e^{-izx}\rho(x)}_{g(z,x)}\,\mathrm{d}x$.

- ⋆ $\forall z\in B_a$, $x\mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- ⋆ pour pp $x\in I$, $z\mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_a (car exp est holomorphe).
- ⋆ $\forall z\in B_a$, pp $x\in I$, $|g(z,x)| \leqslant |f(x)|e^{\frac{a}{2}|x|}\rho(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et est indépendant de z.

Donc, par le théorème d'holomorphie sous signe intégral, F est holomorphe sur B_a et $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall z\in B_a,\ F^{(n)}(z) = (-i)^n \displaystyle\int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$.
Donc, $F^{(n)}(0) = (-i)^n(X^n\,|\,f) = 0$ par hypothèse.
L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique que $F = 0$ sur le connexe B_a, donc en particulier sur l'axe réel.
Donc $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}} = 0$. Comme φ est intégrable (d'après ci-avant), l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$.
$\forall x\in I,\ \rho(x) > 0$ alors $f(x) = 0$ pp sur I. Donc $f = 0 \in L^2(I,\rho)$. □

Exemple : Pour $I = \mathbb{R}^{+*}$ et la fonction poids $x \mapsto x^{-\ln x}$.
Montrons que $\forall x \in I,\ f(x) = \sin(2\pi \ln x)$ est orthogonale à tous les monômes $x \mapsto x^n$.

$$\begin{aligned}
(f \mid x^n) &= \int_{\mathbb{R}^{+*}} x^n \sin(2\pi) x^{-\ln x} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} \,\mathrm{d}y & \text{avec } y = \ln x \\
&= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y) \,\mathrm{d}y \\
&= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t) e^{-t^2} \,\mathrm{d}t & \text{avec } t = y - \frac{n+1}{2} \\
&= 0 & \text{car la fonction est impaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto x^n$ n'est pas totale dans H. La famille des polynômes orthogonaux n'est pas totale non plus : ce n'est donc pas une base hilbertienne.